

文章编号:1006-1355(2020)02-0066-05

# 内外因素作用下隔振橡胶材料本构模型的修正方法

蔺朝莉<sup>1</sup>, 陈志军<sup>1</sup>, 杨平<sup>2</sup>

(1. 重庆电子工程职业学院, 重庆 400054;  
2. 重庆广播电视大学 智能制造与汽车学院, 重庆 401520)

**摘要:** 橡胶材料是一种性能优良的非金属黏弹性材料,广泛应用于机械和汽车产品的振动噪声控制领域。为了对橡胶产品的力学性能进行分析,有必要在材料试验的基础上,采用合适的本构模型,建立橡胶材料的应力-应变模型并辨析模型参数,从而为进一步的橡胶件有限元仿真和动力学分析提供材料参数。普遍应用的Mooney-Rivlin模型和Yeoh模型等唯象模型无法描述内外部复杂因素,如胶料硬度和环境温度对胶料力学特性的影响。在分析实测胶料应力-应变数据的基础上,分别对传统唯象模型进行修正,引入硬度强化因子和温度软化因子,使得本构关系模型更加完善。在所建立的修正模型基础上,采用非线性最小二乘法对修正模型进行参数辨识,并通过与实测结果对比,验证了所建模型的有效性。

**关键词:** 振动与波;隔振橡胶;本构模型;参数识别;温度相关;硬度相关

中图分类号:O422.6

文献标志码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2020.02.012

## Correction Method of Constitutive Model for Vibration-isolation Rubber Material Considering Internal and External Influencing Factors

LIN Zhaoli<sup>1</sup>, CHEN Zhijun<sup>1</sup>, YANG ping<sup>2</sup>

(1. Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 400054, China;  
2. Department of Automotive Technology, Chongqing Radio & TV University, Chongqing 401520, China)

**Abstract:** Rubber material is a non-metallic visco-elastic material with excellent performance. It is widely used in the field of vibration and noise control of machinery and automotive products. In order to analyze the mechanical properties of rubber products, it is necessary to establish a stress-strain model of the rubber material and identify the parameters of the model based on the material tests. Then, the appropriate constitutive model and corresponding material parameters can be used for finite element simulation and dynamic analysis of the rubber parts. The phenomenological models such as the universally used Mooney-Rivlin model and Yeoh model cannot describe complex internal and external influencing factors, such as the influences of rubber hardness and ambient temperature on the mechanical properties of the rubber compound. In this work, on the basis of analyzing the stress-strain data of the rubber tests, the traditional phenomenological model is modified. The hardness enhancement factor and temperature softening factor are introduced to make the constitutive model more perfect. The nonlinear least squares method is used to identify the parameters of the modified model. The validity of the established model is verified by comparing the simulation results with the measurement results.

**Keywords:** vibration and wave; vibration isolation rubber; constitutive model; parameter identification; temperature correlation; hardness correlation

收稿日期:2019-04-23

基金项目:重庆市教育科学规划课题资助项目(2016-GX-168);  
中国高等教育学会职业技术分会课题资助项目  
(GZYZD2016015);重庆电子工程职业学院科研  
平台资助项目(XJPT201703)

作者简介:蔺朝莉(1986-),河南省人,讲师,研究方向为汽车  
振动与噪声分析。

E-mail: linzhaoli\_cq@163.com

橡胶材料是一种性能优良的非金属黏弹性材料,是汽车和机械产品中不可或缺的隔振材料。由于橡胶材料具有强非线性,因此在橡胶产品的有限元分析中,必须在提供橡胶材料的应力-应变本构关系模型的基础上,才能进行下一步的模式分析、刚度分析和强度分析等动、静力学性能方面的研究。

目前常用的橡胶材料本构关系模型有Mooney-

Rivlin 模型、Neo-hookean 模型、Yeoh 模型、Ogden 模型、Arruda-Boyce 模型和 Van der Waals 模型等<sup>[1]</sup>。国内外学者对橡胶本构关系模型进行了大量的研究,取得了丰硕的成果,大大推动了橡胶件的工程应用实践。文献[2]采用伪弹性理论对炭黑填充天然橡胶的 Mullins 效应的描述能力以及对应橡胶本构模型的选择进行了研究,得出 Ogden 模型的拟合精度更高,而伪弹性参数可采用三次多项式进行拟合的结论。文献[3]建立了橡胶输送带的本构关系模型,并在试验参数辨识的基础上研究了加载幅值和加载频率对本构关系的影响规律。文献[4]基于纤维增强连续介质力学理论,提出了一种考虑应变率效应的横观各向同性黏-超弹性本构模型,用于描述短纤维增强三元乙丙橡胶绝热包覆材料的力学特性。文献[5]在对试验数据进行统计学分析的基础上,通过引入随机损伤参数函数扩展 Ogden 模型,建立能够描述 EPDM 初始缺陷的本构方程。上述文献的研究考虑到了 Mullins 效应、加载条件(幅值、频率、应变率)和同批次胶料的不同样件之间的初始缺陷差异性等因素对本构关系模型的影响,但未能考虑由于橡胶的配方、硫化工艺等材料自身内在因素和使用环境条件如温度等外在因素对橡胶本构关系模型的影响。

在不同的使用环境中,环境温度变化时,橡胶件的本构关系会产生一定的变化。此外,由于橡胶的老化,橡胶材料的宏观力学性能都将发生一定的变化,橡胶老化通常在宏观上表现为橡胶硬度的变化,通过测量橡胶硬度的变化可以对其老化程度进行判断<sup>[6]</sup>。因此,如何在不同使用温度、不同老化程度条件(硬度)下都能对橡胶件的力学特性进行准确的预测,成为橡胶件工程设计领域的一个研究重点。文献[7]采用二次多项式模型对 Mooney-Rivlin 模型参数的对数进行了拟合。文献[8]采用 Mooney-Rivlin 超弹本构模型,通过拟合获得了不同胶料硬度与本构模型参数之间的函数关系。文献[9]在 Yeoh 模型和逆幂率模型的基础上,采用多项式拟合的方法研究建立了温度对橡胶材料疲劳特性的修正模型。以上文献在分析温度和硬度对橡胶本构模型关系的影响时,都是采用了本构参数模型参数与温度、硬度的间接拟合方法,而未直接将温度纳入本构关系模型中,这样造成参数拟合结果的外推可信度大打折扣,且无法从物理意义上对温度和硬度等因素对本构关系的影响进行深入的阐释。

为了建立含温度、硬度影响的橡胶本构关系模型,对其他类似黏弹性材料在多因素影响下的本构关系模型文献进行了分析。文献[10]采用复合的指

数函数描述温度对高分子复合材料本构关系的影响。文献[11]采用幂函数模型描述了硬度对轴承钢本构关系模型的影响。文献[12]采用阿累尼乌斯-双曲正弦函数建立了考虑温度、应变率和静水压力影响的聚合物三维本构关系模型。借鉴以上文献的研究思路,本文在实测含硬度影响的橡胶本构模型数据基础上,直接在 Mooney-Rivlin 模型中引入硬度强化因子建立含硬度影响的橡胶本构关系修正模型,在 Yeoh 模型的基础上引入温度软化因子建立温度影响下的橡胶本构关系修正模型,并尝试对硬度强化因子和温度软化因子的物理意义进行阐述。

## 1 橡胶材料试验

橡胶的材料试验可分为单轴拉伸试验、等双轴拉伸试验、平面拉伸试验、压缩试验和剪切试验等。为了快速方便获得橡胶本构模型的数据样本点,采用单轴拉伸试验,由于其相对容易实现且可操作性强而被广泛采用。图1所示的是 GB/T531.1—2008 所规定的橡胶单轴拉伸哑铃型标准 I 型试片。

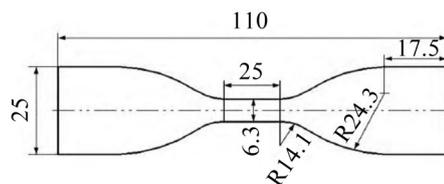


图1 橡胶单轴拉伸哑铃型试片(I型)

图2所示是橡胶拉力试验机。通过拉力试验机可以获得一定拉伸速率下试样的夹持力和长度的变化规律,即可由式(1)和式(2)计算得到拉伸应力 $\sigma$ 和试样应变 $\varepsilon$ 的数值。



图2 橡胶拉力试验机

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1)$$

式(1)中: $F$ 为拉伸力, $A$ 为哑铃型试片最小截面积。

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2)$$

式(2)中: $\Delta l$ 为试件伸长值, $l_0$ 为试片初始长度。

## 2 橡胶本构关系模型及其修正

对于各向同性的橡胶材料,其应变能密度表达式如式(3)所示:

$$W = f(I_1 - 3, I_2 - 3) + g(J - 1) \quad (3)$$

式(3)中:  $W$  为应变能函数,  $f$  为应变偏量能函数,  $g$  为体积应变能函数,  $I_1$  和  $I_2$  为格林应变不变量,  $J$  为橡胶变形前后体积比。其中,格林应变不变量和3个方向的主应变  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  之间的关系如式(4)至式(6)所示:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (4)$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 \quad (5)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (6)$$

在单轴拉伸过程中,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , 且  $\lambda_1$  为伸长比  $\lambda$ , 故:

$$\lambda = \varepsilon + 1 \quad (7)$$

### 2.1 Mooney-Rivlin 模型

Mooney-Rivlin 模型采用  $c_{10}$  和  $c_{01}$  这两个参数描述伸长比  $\lambda$  与应力  $\sigma$  之间的关系, 如式(8)所示:

$$\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})(c_{10} + c_{01}\lambda^{-1}) \quad (8)$$

### 2.2 Yeoh 模型

Yeoh 模型采用  $c_1$ 、 $c_2$  和  $c_3$  这3个参数描述伸长比  $\lambda$  与应力  $\sigma$  之间的关系, 如式(9)所示:

$$\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})[c_1 + 2c_2(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + 3c_3(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)^2] \quad (9)$$

### 2.3 含硬度强化因子的修正 Mooney-Rivlin 模型

引入指数函数形式的硬度强化因子  $\exp(\frac{k_1}{HA} + k_2)$  对 Mooney-Rivlin 本构关系模型进行修正, 硬度强化因子满足类阿累尼乌斯定律, 修正因子  $k_1$  表征的物理含义与激活能类似。

$$\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})(c_{10} + c_{01}\lambda^{-1}) \exp(\frac{k_1}{HA} + k_2) \quad (10)$$

### 2.4 含温度强化因子的修正 Yeoh 模型

引入指数函数形式的温度软化因子  $\exp(\frac{k}{T})$  对 Yeoh 本构关系模型进行修正, 温度软化因子满足阿累尼乌斯定律, 修正因子  $k$  与激活能成比例关系。

$$\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})[c_1 + 2c_2(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + 3c_3(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)^2] \exp(\frac{k}{T}) \quad (11)$$

## 3 结果与讨论

### 3.1 硬度对橡胶应力-应变曲线的影响分析

以文献[8]中由试验获得的不同硬度下橡胶 Mooney-Rivlin 本构模型识别的参数结果(表1)为研究对象, 通过式(8)计算获得不同伸长比下的应力值, 以此应力值为样本点, 采用非线性最小二乘法对式(10)中的模型参数进行辨识, 表2所示是模型参数的识别结果。

表1 不同硬度下橡胶 Mooney-Rivlin 本构模型参数<sup>[8]</sup>

硬度	$c_{10}$	$c_{01}$
50	0.041	0.201
55	0.065	0.301
60	0.102	0.381
65	0.123	0.501
70	0.152	0.622
75	0.194	0.805

具体的操作流程为: 由表(1)和式(8)可获得不同硬度下的应力-应变曲线, 再由式(10)对不同硬度下的应力-应变曲线的参数进行识别, 即可获得2参数模型的参数, 从而将文献[8]中的4参数转变为2参数模型。应该指出的是, 通过式(10)获得的修正的本构关系模型, 类比了阿累尼乌斯定律, 具有明确的物理意义, 模型中考虑了硬度的影响, 区别于文献[8]中的无物理意义的直接数学拟合, 所提出的修正模型的适用范围更广, 而文献[8]的模型要根据不同的数据采用不同的多项式或幂函数拟合阶次。

以表2的修正模型参数为输入, 采用式(10)的含硬度影响的 Mooney-Rivlin 本构模型对不同硬度下的橡胶本构关系曲线进行仿真, 结果如图3所示。

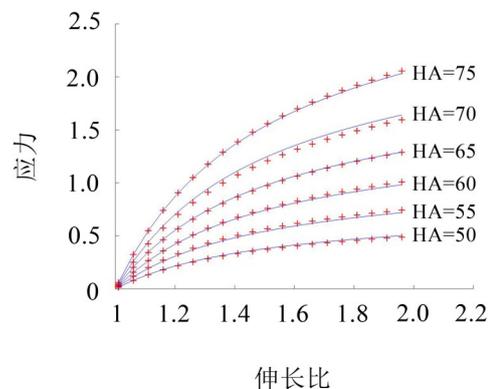


图3 不同硬度下的伸长比-应力曲线

表2 含硬度相关因子的修正 Mooney-Rivlin 模型参数

参数	$c_{01}$	$c_{10}$	$k_1$	$k_2$	相关系数
数值	6.8641	31.4813	-328.971 5	15.209 8	0.999 3

图3中散点为样本点,曲线为根据修正 Mooney-Rivlin 模型得到的计算结果,由图可知,所提出的修正模型可以对不同硬度在橡胶本构模型中的强化作用进行很好量化描述,由表2中的相关系数为0.999 3可知,修正模型的拟合效果很好,且模型新增的参数量为2,比文献[8]中所采用的模型所需的4参数少了2个,而拟合精度却远好于多项式模型,此外,指数函数的外推能力和稳定性均优于多项式模型。图4所示是硬度-伸长比-应力之间的三维曲面关系图,图4直观描述了硬度和伸长比对橡胶本构关系的影响规律,在伸长比较小时,硬度的影响较小,而随着伸长比的增加,硬度的影响越大。

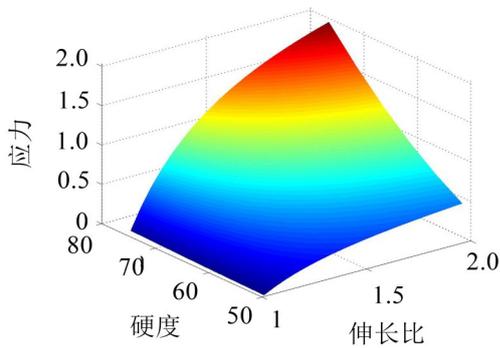


图4 硬度-伸长比-应力三维曲面图

### 3.2 温度对橡胶应力-应变曲线的影响

以文献[9]中由试验获得的不同硬度下橡胶 Yeoh 本构模型识别的参数结果(表3)为研究对象,通过式(9)计算获得不同伸长比下的应力值,以此应力值为样本点,采用非线性最小二乘法对式(11)中的模型参数进行辨识,表4所示是模型参数的识别结果。

表3 不同温度下橡胶 Yeoh 本构模型参数表[9]

温度/°C	$c_1$	$c_2$	$c_3$
20	1.014 0	0.034 13	0.002 66
35	0.909 8	0.017 24	0.004 98
50	0.860 2	0.017 99	0.001 12
65	0.782 5	0.009 60	0.004 33
80	0.675 2	0.000 92	0.001 88
95	0.510 6	0.005 90	0.002 23
110	0.457 6	0.005 99	0.002 62

以表2的修正模型参数为输入,采用式(10)的含硬度影响的 Yeoh 本构模型对不同硬度下的橡胶本构关系曲线进行仿真,结果如图5所示。图5中散点为样本点,曲线为修正 Yeoh 模型的计算结果,由

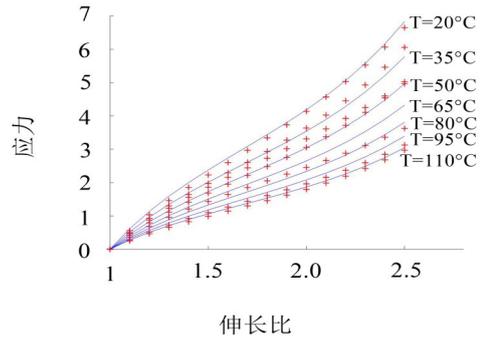


图5 不同温度下橡胶的应力-伸长比曲线

图5可知,所提出的修正模型可以对不同温度在橡胶本构模型中的软化作用进行很好量化描述,由表2中的相关系数为0.993 7可知,修正模型的拟合效果很好,且模型新增的参数量仅为1个,若采用2次多项式分别对 Yeoh 模型的3个参数进行拟合,至少要增加9个参数,而且模型的稳定性和物理意义不如本文所采用的修正方法,故本文所采用的方法可以快速方便确定不同温度下橡胶的本构模型,从而大大减小试验成本。图6所示是温度-伸长比-应力之间的三维曲面关系图,图6直观描述了温度和伸长比对橡胶本构关系的影响规律,在伸长比较小时,温度的影响较小,而随着伸长比的增加,温度的影响越大。

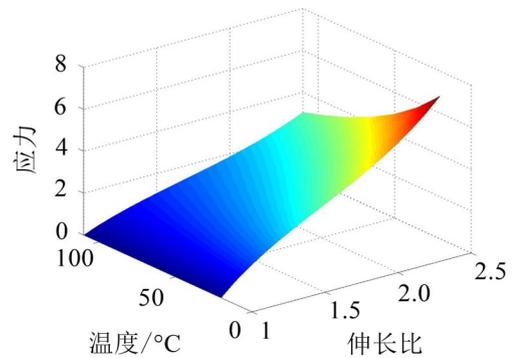


图6 温度-伸长比-应力三维曲面图

## 4 结论与展望

在传统唯象橡胶本构模型的基础上,建立了可以描述内外因素对橡胶应力-应变关系影响规律的模型。主要结论与研究展望如下:

- (1) 考虑了硬度强化作用,建立了含硬度强化因子的 Mooney-Rivlin 橡胶本构关系模型,并发现了硬度强化因子满足类阿累尼乌斯定律,即硬度强化因子与硬度的倒数成指数关系;

表4 含温度相关因子的修正 Yeoh 模型参数

参数	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$k$	相关系数
数值	0.036 25	$-1.592 8 \times 10^{-4}$	$2.455 3 \times 10^{-4}$	$-1.006 9 \times 10^3$	0.993 7

(2) 考虑了温度软化作用,建立了含温度软化因子的Yeoh橡胶本构关系模型,发现了温度软化因子满足阿累尼乌斯定律,即温度软化因子与开氏温度的倒数成指数关系;

(3) 进一步的研究中可以进行综合考虑硬度和温度影响的橡胶材料试验,并提出综合考虑硬度和温度影响的橡胶本构关系模型;采用新型参数识别方法,提高模型参数识别的精度等。

#### 参考文献:

- [1] 王国权,刘萌,姚艳春,等. 不同本构模型对橡胶制品有限元法适应性研究[J]. **力学与实践**,2013,35(4):40-47.
- [2] 王鹭,付宾,杨晓翔. 炭黑填充天然橡胶Mullins效应的仿真与计算分析[J]. **计算力学学报**,2017,34(3):372-378.
- [3] 陈洪月,张坤,李恩东. 钢丝绳芯橡胶输送带本构模型参数辨识与变化规律分析[J]. **振动与冲击**,2017,36(14):234-238.
- [4] 谈炳东,许进升,孙朝翔,等. 短纤维增强三元乙丙橡胶横观各向同性黏-超弹性本构模型[J]. **力学学报**,2017,49(3):677-684.
- [5] 张中水,许进升,陈雄,等. 初始缺陷的随机统计规律在三元乙丙本构模型中的应用[J]. **推进技术**,2016,37(6):1189-1194.
- [6] 阙刚,彭旭东,沈明学,等. 丁腈橡胶热空气老化化学性能分析及贮存寿命预测[J]. **润滑与密封**,2018,43(2):18-25.

- [7] 张良,李忠华,马新强. 橡胶Mooney-Rivlin超弹性本构模型的参数特性研究[J]. **噪声与振动控制**,2018,38(S2):427-430.
- [8] 曾家兴,丁智平,林胜,等. 胶料硬度对超弹本构模型参数及橡胶弹簧刚度的影响[J]. **湖南工业大学学报**,2018,32(3):92-96.
- [9] ZHANG J, XUE F, WANG Y, et al. Strain energy-based rubber fatigue life prediction under the influence of temperature[J]. **Royal Society Open Science**, 2018, 5(10): 1-13.
- [10] TAN Q, LIU L, LIU Y, et al. Thermal mechanical constitutive model of fiber reinforced shape memory polymer composite: Based on bridging model[J]. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, 2014, 64: 132-138.
- [11] UMBRELLO D, HUA J, SHIVPURI R. Hardness-based flow stress and fracture models for numerical simulation of hard machining AISI 52100 bearing steel[J]. **Materials Science and Engineering: A**, 2004,374(1-2):90-100.
- [12] RICHTON J, AHZI S, VECCHIO K S, et al. Modeling and validation of the large deformation inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2007, 44(24): 7938-7954.

(上接第58页)

(5) 解析结果与有限元结果吻合较好,验证了理论方法与解析结果的正确性。

#### 参考文献:

- [1] 罗超,饶柱石,赵玫. 基于格林函数法的封闭声腔的结构-声耦合分析[J]. **振动工程学报**,2004,17(3):296-299.
- [2] 姚昊萍,张建润,陈南,等. 不同边界条件下的封闭矩形声腔的结构-声耦合分析[J]. **声学学报(中文版)**,2007,32(6):497-502.
- [3] LI Y Y, CHENG L. Vibro-acoustic analysis of a rectangular-like cavity with a tilted wall[J]. **Applied Acoustics**, 2007, 68(7): 739-751.
- [4] SUM K S, PAN J. Effects of the inclination of a rigid wall on the free vibration characteristics of acoustic modes in a trapezoidal cavity[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 2006, 119(4): 2201.

- [5] SUM K S, PAN J. Geometrical perturbation of an inclined wall on decay times of acoustic modes in a trapezoidal cavity with an impedance surface[J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 2006, 120(6): 3730.
- [6] CHEN Y, JIN G, FENG Z, et al. Modeling and vibro-acoustic analysis of elastically restrained panel backed by irregular sound space[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2017, 409:201-216.
- [7] 陈跃华,靳国永,刘志刚,等. 非规则封闭空间声场建模的Chebyshev-变分法及其固有声学特性分析[J]. **声学学报**,2017(6):56-64.
- [8] XIE X, ZHENG H, QU Y. A variational formulation for vibro-acoustic analysis of a panel backed by an irregularly-bounded cavity[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2016: S0022460X16002327.